



پژوهشکده پولی و بانکی
بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران

کتاب‌شناسی اقتصاد ریاضی
برای دانشجویان کارشناسی ارشد و دکتری اقتصاد

نگارش

فرهاد نیلی

WP/90-07

پاییز ۱۳۹۰

صلى الله عليه وسلم

پیشگفتار

از سال ۱۳۸۱ همزمان با راه‌اندازی دوره کارشناسی ارشد اقتصاد در دانشگاه صنعتی شریف که مسئولیت تدریس درس «اقتصاد ریاضی» را عهده‌دار شدم، مشاهده سردرگمی دانشجویان در انتخاب کتب مناسب با نیازهای ایشان از میان عناوین متکثر و متنوع موجود در حوزه‌های مرتبط با اقتصاد ریاضی آزاردهنده بود. گستره وسیع مطالب به این سردرگمی می‌افزود. امید است جزوه حاضر که در پاسخ به آن نیاز تهیه و به تدریج تکمیل شده است در پاسخ به نیاز محققان و پژوهشگران علاقه‌مند به مبانی ریاضی اقتصاد مفید افتد. از آقای سعید شادکار که در تنظیم مطالب کمک کردند و نیز همکاران خود در پژوهشکده پولی و بانکی که زحمت آماده‌سازی متن را عهده‌دار شدند صمیمانه سپاسگزارم.

فرهاد نیلی

رئیس پژوهشکده پولی و بانکی
بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران

فهرست مطالب

| صفحه | عنوان |
|------|---|
| یک | پیشگفتار |
| ۱ | مقدمه |
| ۱ | ۱. دسته‌بندی مآخذ |
| ۳ | ۲. متون ریاضی |
| ۳ | ۲-۱. حسابان |
| ۴ | ۲-۲. مبانی ریاضی |
| ۵ | ۲-۳. جبر |
| ۵ | ۲-۴. جبر خطی |
| ۶ | ۲-۵. آنالیز ریاضی |
| ۸ | ۲-۶. معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی |
| ۱۱ | ۲-۷. بهینه‌یابی |
| ۱۲ | ۲-۸. سری‌های زمانی |
| ۱۳ | ۳. کتاب‌های اقتصاد ریاضی |
| ۱۳ | ۳-۱. کتاب‌های عمومی |
| ۲۱ | ۳-۲. دینامیک‌های اقتصادی |
| ۲۷ | ۳-۳. بهینه‌یابی |
| ۲۸ | ۴. پیوست کتاب‌های اقتصادی |
| ۳۰ | ۵. کتاب‌های اقتصادی با زبان ریاضی |
| ۳۷ | منابع و مآخذ |

مقدمه

دانشجویان با درجات متفاوتی از اشراف نسبت به مفاهیم ریاضی و نیز سطوح گوناگونی از مهارت در به‌کارگیری تکنیک‌ها و روش‌های ریاضی، دوره کارشناسی ارشد اقتصاد را شروع می‌کنند. این ناهمگنی که از تنوع در پیشینه تحصیلی و نیز علاقه و ذوق آنها در رویارویی با ریاضیات ناشی می‌شود، آموزش ریاضیات پیشرفته به ایشان را با مشکلات بسیاری روبه‌رو می‌کند.

صرف نظر از آنکه این ناهمگنی در تدریس سطح و عمق معینی از ریاضیات، چگونه در کلاس مدیریت شود؛ گاهی دانشجویان علاقه‌مند می‌شوند که به متونی فراتر از آنچه در کلاس درس اقتصاد ریاضی محور بحث است، مراجعه کنند. این مراجعه از دو خاستگاه کاملاً متفاوت صورت می‌گیرد: گروهی به آشنایی بیشتر در پیش‌نیازها و تعمیق دانش خود در مقدمات نیازمندند و گروهی دیگر به یادگیری مفاهیم و روش‌ها، فراتر از آنچه در کلاس ارائه می‌شود، مشتاق‌اند. هر دو گروه به راهنمایی نیازمندند و این جزوه با هدف ارائه‌ی این راهنمایی نوشته شده است. با توجه به آنکه مخاطب اصلی این نوشته، دانشجویان سال اول کارشناسی ارشدند، در انتخاب عناوین، به کتاب‌ها بسنده شده است. همچنین در موارد بسیاری که تعداد عناوین قابل معرفی فراوان‌تر از تعداد مورد نظر بوده است، قرابت مباحث کتاب‌ها با سرفصل‌های درس اقتصاد ریاضی دانشگاه صنعتی شریف ملاک انتخاب قرار گرفته است.

۱. دسته‌بندی مآخذ

محقق علاقه‌مند به اقتصاد ریاضی، موضوع‌های مورد علاقه خود را در چهار گروه از کتاب‌ها و مقالات می‌تواند جستجو کند. دسته اول مآخذی هستند که توسط ریاضیدانان نوشته شده و با اقتصاد و حتی اقتصاد ریاضی به طور کامل بیگانه‌اند. دانشجوی اقتصاد ریاضی که می‌خواهد دانش خود را در یکی از حوزه‌های ریاضی

مورد نیاز در اقتصاد غنی کند، می‌تواند پاسخ سؤال‌های خود را با انتخاب کتاب ریاضی متناسب با سطح و حوزه مورد نظرش، در این گروه از کتاب‌ها بیابد. در اینجا از هر یک از حوزه‌های ریاضی مطرح در اقتصاد مانند آنالیز ریاضی، جبر خطی، بهینه‌یابی، معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی و در نهایت سری‌های زمانی، به فراخور، چند عنوان معرفی می‌شوند.

گروه دوم، کتاب‌هایی هستند که اقتصاددانان با هدف آموزش ریاضیات مورد نیاز برای درک بهتر اقتصاد، برای دانشجویان اقتصاد نوشته‌اند. این گروه از کتاب‌ها، برحسب سطح ریاضیات مورد نیاز برای درک مطالب و نیز حوزه مطالب پوشش داده شده متنوع‌اند که ما در اینجا شماری از آنها را معرفی می‌کنیم.

گروه سوم، پیوست ریاضی کتاب‌های اقتصاد خرد و کلان‌اند. این دسته از مآخذ که توسط اقتصاددانان نوشته شده، ریاضیات مورد نیاز برای درک بهتر تحلیل‌های ارائه شده در کتاب را در قالب یک مجموعه خودکفا جمع‌آوری کرده‌اند تا خواننده از مراجعه به کتاب‌های دیگر بی‌نیاز شود. به خصوص این گروه از کتاب‌ها از نظر تعاریف، نمادها و سطح مطالب ارائه شده، سازگاری بین ریاضیات و اقتصاد را حفظ کرده‌اند. در این گروه از مآخذ، ریاضیات در حاشیه اقتصاد ارائه می‌شود.

گروه آخر، شامل متونی است که توسط اقتصاددانان مسلط به ریاضیات نوشته شده است و با استحکام و دقت درخور یک متن ریاضی، مباحث اقتصادی را ارائه کرده‌اند؛ به گونه‌ای که خواننده، موضوع‌های اقتصادی را با زبان ریاضی فرا می‌گیرد.

رابطه ریاضیات و اقتصاد در این متون، رابطه ظرف و مظلوف، قالب و محتوا یا روش و مفهوم است. مراجعه به این متون فقط به دانشجویانی توصیه می‌شود که از بلوغ و تسلط کافی در کاربست روش‌های ریاضی، دست‌کم در حوزه مورد نظر، در تحلیل مدل‌های اقتصادی برخوردارند.

در ادامه به معرفی فهرستی گزینشی از مآخذ اشاره شده، بر اساس

تقسیم‌بندی چهارگانه معرفی شده، می‌پردازیم. بدیهی است با توجه به گستردگی و تنوع عناوین موجود در هر گروه، عناوین معرفی شده افزون بر میزان قرابت با سرفصل‌های درس اقتصاد ریاضی، تابع ذوق و سلیقه نویسنده این سطور نیز بوده است.

۲. متون ریاضی

متون ریاضی تخصصی مفید برای مطالعه دانشجویان درس اقتصاد ریاضی را بر حسب موضوع به ۹ گروه تقسیم می‌کنیم. بدیهی است مراجعه دانشجویان به کتاب‌های معرفی شده در هر حوزه از این گروه، تابع میزان آشنایی و تسلط وی به مباحث مورد نظر بوده و از دانشجویی به دانشجویی دیگر متفاوت است.

۲-۱. حسابان

به دانشجویان درس اقتصاد ریاضی توصیه می‌شود حتماً یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (حسابان^۱) در کنار دست خود داشته باشند. با توجه به طیف گسترده این کتاب‌ها و شمار زیادی از آنها که به فارسی ترجمه شده است، دانشجویان می‌توانند یکی از کتاب‌های در دسترس را متناسب با ذوق و سلیقه خود انتخاب کنند. از جامع‌ترین و موفق‌ترین این کتاب‌ها، دو عنوان زیر است:

شهشهانی، سیاوش، «حساب دیفرانسیل و انتگرال»، جلد اول و دوم، ۱۳۸۹،

انتشارات فاطمی.

Thomas, G. B. and R. L. Finney, "Calculus and Analytical Geometry", Addison-Wesley, 1988.²

1- Calculus

۲- ویرایش هفتم این کتاب توسط مهدی بهزاد و همکارانش ترجمه و در نوبت نخست در سال ۱۳۷۰ توسط مرکز نشر دانشگاهی منتشر شده است. چاپ بیست‌وپنجم این کتاب در سال

۱۳۸۹ منتشر شده است.

انتظار نمی‌رود دانشجوی اقتصاد ریاضی در کتاب‌های متعارف حسابان، مطلب جدیدی بیابد، ولی مراجعه به یک کتاب معتبر و کنار دست داشتن آن برای یادآوری ظرایف مربوط به تعریف حد، مشتق، انتگرال، توابع چند متغیره، قواعد مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری، معادلات پارامتریک، مختصات قطبی، دنباله‌ها و سری‌ها، هندسه بردارها و توابع برداری، مشتق‌های جزئی و انتگرال‌های چندگانه و در نهایت آنالیز برداری، در هفته‌های اول نیم‌سال که دانشجوی درس اقتصاد ریاضی را می‌گیرد، اکیداً توصیه می‌شود.

۲-۲. مبانی ریاضی

درس مبانی ریاضیات، نخستین مرحله از گذار دانشجویان ریاضی از شهود به تجرید است. در این درس دانشجویان با رویکرد اصل موضوعی^۱ ریاضیات، روش‌های اثبات، ساختار قضایا و احکام ریاضی، زبان و آیین نگارش متون استاندارد ریاضی آشنا شده و بازخوانی همه یافته‌ها و دانسته‌های قبلی خود از ریاضیات را در یک چارچوب اصل موضوعی مجرد تمرین می‌کنند.

به دانشجویان اقتصاد ریاضی که علاقه‌مندند مطالب فصل اول درسنامه اقتصاد ریاضی^۲ را فراتر از آنچه در این فصل ارائه شده فراگیرند، توصیه می‌شود یک کتاب معتبر مبانی ریاضیات را تورق کنند و ذائقه خود برای یادگیری مفاهیم اولیه ریاضیات از منظر یک ریاضیدان را بیازمایند. کتاب زیر برای این منظور توصیه می‌شود:

Stewart, I. and D. Tall, "The Foundations of Mathematics", Oxford University Press, 1977.

این کتاب توسط دکتر محمد مهدی ابراهیمی ترجمه و در سال ۱۳۶۵ توسط

1- Axiomatic.

۲- در سرتاسر این نوشته، منظور از درسنامه اقتصاد ریاضی یا به طور مختصر درسنامه، یادداشت‌های نگارنده است که برای تدریس اقتصاد ریاضی به دانشجویان کارشناسی ارشد اقتصاد در دانشکده مدیریت و اقتصاد دانشگاه صنعتی شریف تدوین شده و در دست تنظیم نهایی برای انتشار است.

مرکز نشر دانشگاهی منتشر شده است.

۲-۳. جبر

به خواننده‌ای که به ساختارهای جبری علاقه‌مند است و می‌خواهد ساختارهای معرفی شده در این درس از قبیل گروه، حلقه، میدان و فضای برداری را عمیق‌تر فراگرفته و یا با ساختارهای جبری بیشتری آشنا شود، توصیه می‌شود یک کتاب در زمینه «جبر مجرد» را ببیند. یکی از کتاب‌های معتبری که برای این منظور معرفی می‌شود، عنوان زیر است:

Fraleigh, J., "A First Course in Abstract Algebra", Addison-Wesley, 1982.

این کتاب توسط مرحوم مسعود فرزاد به فارسی ترجمه و توسط مرکز نشر دانشگاهی در سال ۱۳۸۵ (چاپ نهم) منتشر شده است.

۲-۴. جبر خطی

در هر درسنامه اقتصاد ریاضی پیشرفته، لازم است فصل مبسوطی به جبر خطی اختصاص یابد، زیرا از یک سو جبر ماتریسی ابزار دست اقتصاددانان در اقتصادسنجی، اقتصاد خرد و اقتصاد کلان است و از سوی دیگر، درک تبدیلات خطی و به خصوص ساختار ویژه^۱ آنها در تحلیل سیستم‌های دینامیکی چند متغیره بسیار به کار می‌آید. همچنین فرم‌های معین^۲ در مسائل بهینه‌یابی و اطمینان از کفایت شرایط مرتبه اول^۳ بسیار مفیدند.

هرچند برای همه این سرفصل‌ها، توضیحات مبسوطی در فصل پنجم درسنامه ارائه شده، ولی خواننده علاقه‌مند با رجوع به کتاب‌های جبر خطی و جبر ماتریسی می‌تواند دامنه و عمق دانش خود را در این زمینه توسعه دهد. کتاب‌های جبر خطی، نوعاً حوزه دانش مورد نیاز در این زمینه را گسترش می‌دهند و

1- Eigen Structure

2- Definite

3- First Order Conditions

کتاب‌های جبر ماتریسی، بر دامنه تکنیک‌ها و عملیات جبری با ماتریس‌ها می‌افزایند. از کتاب‌های معتبر در این دو زمینه، عناوین زیر قابل توصیه‌اند:

Hoffman, K. and R. Kunze, "Linear Algebra", Prentice Hall, 1971.

Abadir, K. and J.R. Magnus, "Matrix Algebra", Cambridge University Press, 2005.

کتاب نخست که توسط جمشید فرشیدی ترجمه و در سال ۱۳۶۵ توسط مرکز نشر دانشگاهی منتشر شده است،^۱ کتاب پایه و مأخذ معتبر جبر خطی در جامعه ریاضی‌خوانده‌ها می‌باشد. مأخذ اصلی نویسنده در تهیه مطالب فصل پنجم درسامه همین کتاب بوده است.

کتاب جبر ماتریسی ابادیر و مگنوس، از شمار وسیع رقبای خود با دو ویژگی متمایز است؛ نخست آنکه نویسندگان، کتاب را برای خوانندگانی نگاشته‌اند که جبر ماتریسی را برای درک بهتر اقتصادسنجی و آمار می‌خواهند. بنابراین سرفصل‌ها با این هدف تنظیم شده‌اند. ویژگی دوم آنکه کل کتاب شامل مثال و تمرین حل شده است. تمرین‌ها متعدد، متنوع، ظریف و فنی‌اند و راه حل‌ها دقیق، محکم و پخته نوشته شده‌اند. با توجه به این دو ویژگی، این کتاب در کنار کتاب انتزاعی‌تر جبر خطی هافمن و کنزی، ترکیب مناسبی در اختیار دانشجوی درس اقتصاد ریاضی، برای تحکیم و تعمیق دانش خود در جبر خطی و تقویت مهارت خود در جبر ماتریسی، ارائه می‌دهد.

۵-۲. آنالیز ریاضی

در فصل‌های دوم و سوم درسامه اقتصاد ریاضی، برخی مفاهیم بنیادین آنالیز ریاضی مانند توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای، پیوستگی و مشتق‌پذیری که آشنایی با آنها به درک عمیق‌تر دانشجویان اقتصاد از مدل‌های تحلیلی اقتصاد کمک می‌کند، ارائه شده‌اند. مأخذ اصلی همه این مباحث، کتاب آنالیز ریاضی رودین است:

۱- چاپ پانزدهم این ترجمه در سال ۱۳۸۸ منتشر شده است.

Rudin, W., "Principles of Mathematical Analysis", McGraw-Hill, 1976.
 به گفته علی اکبر عالمزاده که ویرایش این کتاب را در سال ۱۳۶۳ ترجمه کرده است^۱، کتاب اصول آنالیز ریاضی رودین، «شهره آفاق است. هر کجا دانشگاهی هست و ریاضیاتی، این کتاب و مؤلف آن مطرح‌اند. اهل فن کتاب را بهترین کتاب آنالیز ریاضی می‌دانند و الحق که در این باب نظر صواب دارند.»
 کتاب‌های درسی پس از انتشار کتاب فوق، وام‌دار رودین‌اند چرا که وی در بیان ریاضیات، سبکی را پایه‌گذاری کرده است که ایجاز، استحکام و سازگاری زبان ریاضی را در ارائه مباحث انتزاعی به نمایش می‌گذارد و خواننده را مسحور شکوه و زیبایی ریاضیات مجرد می‌کند.

فصل‌های دوم تا پنجم کتاب رودین به ترتیب توپولوژی پایه، دنباله‌ها و سری‌های عددی و پیوستگی و در نهایت مشتق‌گیری را معرفی می‌کنند. به علاوه، دنباله‌ها و سری‌های توابع در فصل هفتم، توابع خاص در فصل هشتم و توابع چند متغیره در فصل نهم معرفی شده‌اند. مباحث این فصل از قبیل اصل انقباض، قضیه تابع معکوس، قضیه تابع ضمنی و قضیه رتبه، از مباحث کلیدی در اقتصاد خرد پیشرفته‌اند. همچنین برای خوانندگان علاقه‌مند به نظریه اندازه، مطالبی در فصل یازدهم به اختصار آمده است.

به رغم همه زیبایی‌های مسحورکننده کتاب رودین، نمی‌توان از همه دانشجویان اقتصاد ریاضی انتظار داشت که از سطح ریاضیات ارائه شده در کتاب فوق و به خصوص از پیراستگی مطالب از هرگونه شهود، لذت ببرند. به این گروه از دانشجویان که ذائقه آنها زبان انتزاعی رودین را بر نمی‌تابد، توصیه می‌شود آنالیز را به کل کنار نگذارند و خود را از آشنایی با یکی از شکوهمندترین مخلوقات ذهن بشری محروم نکنند. برای این گروه، متونی چون کتاب «آنالیز ریاضی میانه» بات، نقطه شروع خوبی است:

Bhatt, R. D., "Intermediate Mathematical Analysis", Narosa, 2009.

کتاب بات مشحون از مثال است. تمرین‌های حل شده و حل نشده در آن

بی‌شمارند. اثبات قضایا به صورت تفصیلی و مرحله‌بندی است و ایده‌ها تا پرورانده نشده‌اند، دستمایه توسعه و انتزاع نگردیده‌اند. از نظر حوزه طرح مطالب نیز، غیر از سری‌های فوریه در فصل دهم کتاب که نسبت به مطالب بنیادین اقتصاد ریاضی، پیرامونی تلقی می‌شود، مطالب ارائه شده در ۹ فصل دیگر همه با سرفصل‌های آنالیز ریاضی پوشش داده شده در درسنامه نزدیک و مرتبط‌اند. در مجموع، مطالعه کتاب بات به خوانندگانی که علاقه‌مندند مباحث ارائه شده از آنالیز ریاضی در این درس را گسترده‌تر، شهودی‌تر و تفصیلی‌تر فراگیرند، توصیه می‌شود.

به عنوان جایگزین کتاب رودین، می‌توان کتاب زیر را نیز معرفی کرد:
Kolmogorov, A.N. and S.V. Fomin, "Introductory Real Analysis",
Translated From Russian by R. Silverman, Dover Publications, 1970.
این کتاب از این نظر که از استحکام، تیزبینی، پختگی و قدرت استدلال کولموگروف و فامین سود برده، خواندنی است. سرفصل‌ها، دربرگیرنده مطالب بنیادین آنالیز ریاضی از قبیل فضاهای متری، فضاهای توپولوژیک و خطی، تابع‌ها و عملگرهای خطی، انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری‌اند.
به رغم ساده‌سازی سیلورمن، مانند سایر کتاب‌های جدی و حرفه‌ای آنالیز ریاضی، متن از لفاظی و زیاده‌گویی به دور است؛ از شهود آنی و تربیت نشده در آن خبری نیست؛ هرچه در آن است ریاضیات است و خواننده چنانچه برای درک و کار با ساختارهای انتزاعی ریاضی، ممارست نکرده باشد؛ ممکن است از بیان تجربیدی و عاری از مثال یا شهود متعارف در کتاب خسته شود. غیر از آن، زبان و مفاهیم مورد استفاده در کتاب کولموگروف و فامین، ریاضیات ناب‌اند.

۲-۶. معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی

در این حوزه، از میان شمار کتاب‌های موجود در بازار، ۳ عنوان زیر معرفی می‌شوند:

Hirsch, M. and S. Smale, "Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra", Academic Press, 1974.

Jordan, D.W. and P.Smith, "Nonlinear Ordinary Differential Equations", Oxford University Press, 1999.

Perko, L., "Differential Equations and Dynamical Systems", Springer Verlag, 1991.

کتاب «معادلات دیفرانسیل، سیستم‌های دینامیکی و جبر خطی» مورس هرش و استفن اسمیل، از متون پایه و مقدماتی ریاضی در سیستم‌های دینامیکی است. دینامیک‌های خطی قطعی^۱ به خصوص از نوع خودگردان^۲، در این کتاب به خوبی پوشش داده شده‌اند؛ به گونه‌ای که می‌توان ادعا کرد کمتر مطلب ناگفته‌ای در این خصوص مانده که در کتاب هرش و اسمیل توضیح داده نشده باشد. این کتاب از نظر آموزشی جذاب و بسیار قابل استفاده است و مطالب با تدریجی ملایم و قابل تعقیب ارائه شده‌اند. قضایا و نکات در هر قدم ثابت شده‌اند. مثال‌ها روشن و تمرین‌ها گسترده و متنوع‌اند. بیان نویسندگان دقیق و پخته و در عین حال جذاب است. مزیت دیگر آنکه دانش فرض گرفته شده برای خواننده، حساب دیفرانسیل و انتگرال و جبر خطی مقدماتی است. بقیه مطالب در کتاب ارائه شده‌اند.

متن کتاب، همگرا و منسجم است. هرچند نویسندگان فصل‌های مختصری را به دینامیک‌های غیرخطی، رباینده‌ها^۳، معادلات غیر خودگردان، نظریه انشعاب^۴ و پایداری ساختاری^۵ اختصاص داده‌اند ولی کانون اصلی کتاب را دینامیک‌های خطی و خودگردان از مرتبه دو به بالا تشکیل می‌دهد. از این نظر کتاب هرش و اسمیل را می‌توان مقدمه‌ای برای ورود به دنیای جذاب دینامیک‌های غیرخطی تلقی کرد که در کتاب جردن و اسمیت، کانون اصلی بحث را تشکیل می‌دهد.

سطح کتاب، مناسب دانشجویان کارشناسی ریاضی و کارشناسی ارشد غیرریاضی است. هرچند نویسندگان در تنظیم درسنامه حاضر بهره زیادی از کتاب هرش و اسمیل برده است ولی گزیده‌های نویسندگان از کتاب، خوانندگان را بی نیاز

-
- 1- Deterministic
 - 2- Autonomous
 - 3- Attractors
 - 4- Bifurcation
 - 5- Structural Stability

از مراجعه مستقیم به این کتاب خواندنی نمی‌کند.^۱ جوردن و اسمیت در کتاب «معادلات دیفرانسیل عادی غیرخطی»، مجموعه جامعی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی قطعی را در ۱۳ فصل و ۵۵۰ صفحه ارائه کرده‌اند. معادلات مرتبه دوم مسطح^۲ در فصل اول، معادلات خودگردان مسطح و خطی‌سازی^۳ در فصل دوم، جنبه‌های هندسی معادلات مسطح در فصل سوم، جواب‌های تناوبی و روش‌های متوسط‌گیری در فصل چهارم، روش‌های انحراف^۴ در فصل پنجم و روش‌های انحراف منفرد^۵ در فصل ششم، نوسان‌های تحت فشار شامل پاسخ همساز^۶ و پایداری در فصل هفتم و هشتم، تعیین پایداری به وسیله جواب جابه‌جا شده در فصل نهم، روش‌های لیاپانوف برای تعیین پایداری جواب در فصل دهم، وجود جواب‌های تناوبی در فصل یازدهم، انشعاب‌ها و منیفولدها در فصل دوازدهم، دنباله‌های پوانکاره، انشعاب‌های هموکلینیک و آشوب^۷ نیز در فصل فصل سیزدهم ارائه شده‌اند.

سطح کتاب فراتر از حد مورد انتظار برای دانشجویان کارشناسی ارشد اقتصاد است. از این‌رو، مطالعه کتاب جوردن و اسمیت به عنوان یک کتاب کمکی تنها به دانشجویانی توصیه می‌شود که علاقه‌مندند دانش ریاضی خود را در مورد سیستم‌های دینامیکی غیرخطی گسترش دهند. به خصوص در مورد دیاگرام فاز و سیستم‌های مسطح، کتاب جوردن و اسمیت مرجع بسیار مناسبی است.

در مقایسه با کتاب هرش و اسمیل، کتاب «معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی» پرکو از نظر آهنگ ارائه مطالب، سریع‌تر، از نظر پوشش

۱- پس از ۳۰ سال از انتشار کتاب فوق، نویسندگان متن قبل را بازنگری کرده و به همراه دوانی،

کتاب زیر را منتشر کردند:

Hirsch, M., S.Smale and R.Devaney, "Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos", Academic Press, 2004.

2- Planar

3- Linearization

4- Perturbation

5- Singular

6- Harmonic

7- Chaos

مباحث مرتبط با سیستم‌های دینامیکی، محدودتر و از نظر درجه ایجاز و اختصار، موجزتر است. از این نظر کتاب پرکو به عنوان مکمل مباحث ارائه شده در فصل هفتم و هشتم درسنامه و مأخذی برای مراجعه دانشجویان علاقه‌مند به سیستم‌های دینامیکی معرفی می‌شود.

۷-۲. بهینه‌یابی

اغراق نیست اگر ادعا شود سرتاسر اقتصاد ریاضی با بهینه‌یابی آمیخته شده است. اگر اقتصاد را دانش انتخاب بهترین گزینه از میان گزینه‌های ممکن، با توجه به کمیابی منابع تعریف کنیم، اقتصاد ریاضی در یک کلام چیزی جز صورت‌بندی این فرایند نیست. بدیهی است با این تعریف، بهینه‌یابی در قلب اقتصاد ریاضی قرار دارد. جالب اینجاست که مسأله بهینه‌یابی، تقریباً همپای تمامی مدل‌های متنوع مورد بحث در اقتصاد ریاضی گسترش یافته است: بهینه‌یابی ایستا و پویا؛ گسسته و پیوسته؛ قطعی و تصادفی، یک متغیره و چند متغیره، شماری از این حالت‌های متنوع‌اند.

کتاب «نخستین درس در نظریه بهینه‌یابی» نوشته ساندرام، به عنوان دایرةالمعارفی جامع، تقریباً تمامی مباحث مورد نیاز دانشجویان درس اقتصاد ریاضی را پوشش می‌دهد. تنها نقطه ضعف کتاب، سکوت در مورد بهینه‌یابی مدل‌های پویای پیوسته است که به رغم اهمیت، در کتاب پوشش داده نشده‌اند. بدون در نظر گرفتن آن، کتاب ساندرام در سایر زمینه‌های بهینه‌یابی، مأخذی متقن و معتبر است. همچنین در خصوص تقعر توابع و شرایط لازم و کافی بهینگی، کتاب از غنای زیادی برخوردار است. مشخصات کتاب از این قرار است:

Sundaram, R., "A First Course in Optimization Theory", Cambridge University Press, 1999.

۸-۲. سری‌های زمانی

دانشجوی کارشناسی ارشد اقتصاد در نخستین رویارویی خود با کمیت‌های اقتصاد کلان درمی‌یابد که بخش چشمگیری از اعداد و ارقام، با نظم‌هایی خاص در طول زمان چیده شده‌اند و با گذر زمان متولد و ثبت می‌شوند. سپس فرا می‌گیرد که رمزگشایی از فرایند تولید این متغیرها به مهارت و دانش خاصی نیاز دارد که دانش سری‌های زمانی نامیده می‌شود. بسیاری از دانشجویان، این دانش را در دوره کارشناسی فرا نگرفته‌اند. برای این گروه از دانشجویان، مطالعه کتاب مبانی پیش‌بینی دایبولد، توصیه می‌شود. مشخصات کتاب از این قرار است:

Diebold, F.X, "Elements of Forecasting", Thomson, 2004.

کتاب دایبولد، متنی مقدماتی درباره پیش‌بینی سری‌های زمانی است که از نظر آموزشی، جذاب و خواندنی است و گام به گام مراحل کار با سری‌های زمانی را آموزش می‌دهد. به علاوه، کتاب مملو از مثال‌ها و تمرین‌های حل شده است و اصل تدریج در ارائه مطالب آن به خوبی اعمال شده است.

این کتاب برای کسانی که از سری‌های زمانی هیچ نمی‌دانند، نقطه شروع خوبی است. مزیت عمده این کتاب برای دانشجویان درس اقتصاد ریاضی آن است که می‌توانند دینامیک‌های گسسته تصادفی را بدون هیچ پیش‌نیازی با مطالعه کتاب فوق، به صورت تجربی بیاموزند. مثال‌ها و تمرین‌های ارائه شده با بیشتر نرم‌افزارهای آماری قابل پیاده‌سازی‌اند و هیچ پیش‌نیازی فراتر از آمار و احتمال مقدماتی برای درک مطالب آن لازم نیست.

در مقابل، کتاب تحلیل سری‌های زمانی هامیلتون، کتابی پیشرفته و کاملاً

فنی است:

Hamilton, J.D., "Time Series Analysis", Princeton University Press, 1994.

با آنکه بیش از ۱۵ سال از انتشار این کتاب می‌گذرد، کتاب هامیلتون هنوز هم‌اوردی ندارد و مباحث مطرح شده در آن از نظر استحکام، دقت و عمق از یک سو و گستره پوشش از سوی دیگر، نه تنها برای دانشجویان کارشناسی ارشد و

دکتری اقتصاد و آمار، بلکه برای محققان نیز دایرةالمعارف سری‌های زمانی تلقی می‌شود.

پیشنهاد می‌شود آن دسته از دانشجویان درس اقتصاد ریاضی که پیش‌تر درسی را در سری‌های زمانی فراگرفته‌اند و یا مطالعات جدی در این زمینه داشته‌اند، چنانچه در درک مباحث فصل‌های پایانی کتاب دایبولد مشکلی نداشته و به سری‌های زمانی علاقه‌مند بوده و یا می‌خواهند در این زمینه مزیت نسبی کسب کنند، کتاب هامیلتون را در کنار خود داشته و هر از گاهی به آن مراجعه کنند.

۳. کتاب‌های اقتصاد ریاضی

کتاب‌های اقتصاد ریاضی توسط اقتصاددانان و برای اقتصادخوانان نوشته شده است. از این‌رو، از نظر ادبیات مورد استفاده، پیش‌نیازهای مفروض برای خواننده، مثال‌های مورد استفاده و نیز گزینش مطالب، به مذاق خواننده اقتصادخوانده آشنا ترند. این گروه از کتاب‌ها را بر حسب حوزه پوشش مطالب به ۳ گروه تقسیم می‌کنیم. گروه اول، کتاب‌هایی هستند که حوزه گسترده‌ای از مباحث اقتصاد ریاضی را پوشش می‌دهند. گروه دوم، فقط به مباحث اقتصاد ریاضی پویا پرداخته‌اند و گروه سوم، فقط بهینه‌یابی در اقتصاد را موضوع کار خود قرار داده‌اند. در ادامه به ترتیب، عناوین مربوط به هر گروه را معرفی می‌کنیم.

۳-۱. کتاب‌های عمومی

در این گروه کتاب‌هایی قرار می‌گیرند که طیف وسیع و گسترده‌ای از مباحث ریاضی مبتلا به اقتصادخوانان را ارائه کرده‌اند. عناوین کتاب‌هایی را که در این گروه می‌گنجد به ترتیب بر حسب سطح مطالب، از آسان به مشکل معرفی می‌کنیم.

پورکاظمی، محمد حسین، «ریاضیات عمومی و کاربردهای آن»، نشر نی،

۱۳۷۹.

کتاب ریاضیات عمومی و کاربردهای آن که توسط محمدحسین پورکاظمی تألیف و در دو جلد منتشر شده است، تمامی سرفصل‌های درس حسابان را پوشش می‌دهد. مزیت نسبی کتاب نسبت به سایر کتاب‌های در دسترس حسابان آن است که از سویی به دلیل تألیف توسط یک ریاضیدان فارسی زبان، برای خواننده فارسی زبان قابل فهم‌تر و مأنوس‌تر است. از سوی دیگر، کتاب فصل مشبعی در خصوص معادلات تفاضلی^۱ دارد که در سایر کتاب‌های مشابه یافت نمی‌شود و از این نظر برای دانشجویان اقتصاد ریاضی مغتنم است. در مقابل، نقطه ضعف مهم کتاب، فقر تصویری مباحث است که در تدریس مباحثی از این سطح آزاردهنده است.

هرچند در عنوان کتاب تصریح نشده است ولی به دلیل آنکه نویسنده بارها این کتاب را در دانشکده اقتصاد و به دانشجویان اقتصاد درس داده است، رنگ و بوی مثال‌های اقتصادی و به خصوص جهت‌گیری مباحث بهینه‌یابی کتاب به سمت مسائل مبتلا به دانشجویان کارشناسی اقتصاد، در کتاب مشهود است.

Hoy, M., J. Livernois, C. Mc Kenna, R. Rees, and T. Stengos, "Mathematics for Economics", MIT Press, 2001.

کتاب «ریاضیات برای اقتصاد» نوشته‌ی هوی و همکارانش، در ۲۵ فصل و بیش از ۱۱۰۰ صفحه یکی از جامع‌ترین کتاب‌های اقتصاد ریاضی است که در چند سال اخیر منتشر شده است. این کتاب دایرة‌المعارفی از موضوعات ریاضی مورد نیاز برای اقتصادخوانان است که به جرأت می‌توان ادعا کرد در ایفای نقش فوق، نکته‌ای فروگذار نشده است.

این کتاب در پنج قسمت و بیست و پنج فصل تنظیم شده است. فصل اول به مقدمات و مفاهیم پایه همچون مجموعه‌ها و توابع، منطق ریاضی و دنباله‌ها اختصاص دارد. قسمت دوم به حسابان تک متغیره و بهینه‌سازی می‌پردازد و پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع تک متغیره و بهینه‌سازی آنها توابع در این قسمت توضیح داده شده‌اند. موضوع قسمت سوم، جبر خطی است. دستگاه معادلات

خطی، مفاهیم اولیه در جبر ماتریسی، فضای برداری، مسأله مقادیر ویژه و فرم‌های درجه دوم در این قسمت مورد بحث قرار گرفته‌اند.

حسابان چند متغیره شامل مشتق جزئی، دیفرانسیل کل، تقعر و تحدب، بهینه‌سازی غیر مقید و مقید توابع چند متغیره و شرایط کان - تاکر در قسمت چهارم کتاب ارائه شده‌اند. در پایان، قسمت پنجم کتاب با عنوان «انتگرال گیری و روش‌های پویا» شامل ده فصل، گسترده‌ترین قسمت کتاب است. معادلات تفاضلی مرتبه اول خطی و غیرخطی و معادلات تفاضلی خطی مرتبه دوم، معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی مرتبه اول و معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم و نیز دستگاه معادلات خطی مرتبه اول تفاضلی و دیفرانسیل در این قسمت توضیح داده شده‌اند. همچنین فصلی مجزا به نظریه کنترل اختصاص دارد.

مخاطبان اصلی کتاب هوی و همکارانش، دانشجویان سال آخر دوره کارشناسی اقتصادی هستند. به همین دلیل سطح کتاب برای دانشجویان کارشناسی ارشد، مقدماتی است. با این حال، به دلیل گستردگی و جامعیت مباحث، بیان ساده و نیز سهولت استفاده، کتاب «ریاضیات برای اقتصاد» می‌تواند برای مراجعه دانشجویان درس اقتصاد ریاضی مناسب باشد. مزیت دیگر کتاب، وجود پاسخ‌نامه سؤالات و تمرین‌های این کتاب است که به طور جداگانه توسط ناشر اصلی منتشر شده است. مشخصات پاسخ‌نامه کتاب به شرح زیر است:

Hoy et al., "Student's Solution Manual for Mathematics for Economics", MIT Press, 2001.

کتاب بعدی از نظر سطح و درجه دشواری مطالب، «روش‌های تحلیلی در

اقتصاد» نوشته تاکایاما است:

Takayama, A., "Analytical Methods in Economics", the University of Michigan Press, 2000.

کتاب فوق، حاصل گزینش تاکایاما از برخی روش‌ها و مدل‌های ریاضی مورد

استفاده برای دانشجویان کارشناسی ارشد اقتصاد است. معیار تاکایاما در انتخاب مطالب بر نویسنده این سطور روشن نیست؛ اما معیار هرچه باشد، کتاب در حوزه دینامیک‌های اقتصادی، غنی، متنوع و خواندنی است. بیان دقیق، تلفیق مناسبی از

نظریه و کاربرد، انتخاب حدی میانه بین ایجاز و تفصیل که نه خواننده را با تفصیل بیش از حد می‌آزارد و نه وی را از فهم دقائق و ظرایف و مسیر استدلال باز می‌دارد؛ کتاب تاکایاما را برای دانشجویان درس اقتصاد ریاضی جذاب و خواندنی می‌کند.

این کتاب در پنج بخش، یازده فصل و سه پیوست و در ۶۷۰ صفحه تنظیم شده است. بخش اول به مقدمات اختصاص دارد. مجموعه‌ها، توابع، استدلال‌های منطقی، همگرایی، پیوستگی و مختصری در مورد توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای، فرم‌های درجه دوم، مشتق‌پذیری و توابع مقعر و شبه مقعر در این بخش معرفی شده‌اند.

موضوع بخش دوم، برنامه‌ریزی غیرخطی و کاربردهای آن در حوزه اقتصاد خرد است. شرایط مرتبه اول در بهینه‌یابی غیرمقید، تعادل‌های زینی و قضیه پوش^۱ در حوزه مسائل نظری، در این بخش ارائه شده‌اند. در حوزه کاربردهای اقتصاد خرد، کشش جانشینی عوامل تولید، مفهوم بازده نسبت به مقیاس، توابع هزینه نهایی و متوسط، عرضه نیروی کار و انتخاب بین فراغت و درآمد، انحصار کامل و قضیه کواز^۲ در این بخش مطرح شده‌اند.

بخش سوم، کاربرد مدل‌های ریاضی غیر خطی در اقتصاد را پوشش می‌دهد. فرض مطلوبیت مورد انتظار و رفتار مصرف‌کننده در رویارویی با ریسک، مدیریت سبد دارایی‌ها، بیمه، تصمیم‌گیری نسبت به مصرف و پس‌انداز، تقارن نداشتن اطلاعات، بازار کالاهای بنجل^۳، علامت‌دهی^۴ و کژگزینی^۵ موضوع‌های مورد بحث در این بخش‌اند.

عنوان بخش چهارم که در سه فصل تنظیم شده است، معادلات دیفرانسیل و تحلیل‌های اقتصادی است. معادلات دیفرانسیل عادی و کاربردهای آنها در پایداری تعادل رقابتی والراس، پایداری مدل کینزی IS-LM، مدل رشد نئوکلاسیک،

1- Envelop Theorem

2- Coase Theorem

3- Lemon

4- Signaling

5- Adverse Selection

منحنی فیلیپس و مدل WKR^۱، موضوع‌های ارائه شده در فصل ششم کتاب‌اند. تاکایاما در فصل هفتم، معادلات دیفرانسیل مسطح غیرخطی و خطی را معرفی می‌کند. فصل هشتم نیز به تعادل اقتصاد کلان و مدل‌های رشد نئوکلاسیک در حالت وجود پول اختصاص یافته است.

نظریه کنترل بهینه و کاربردهای اقتصادی آن، موضوع بخش پایانی کتاب است. اصل ماکزیمم پونتری‌اگین، حساب تغییرات^۲ و کاربردهای آنها در مدل رشد بهینه در فصل نهم بحث شده است. مسأله کنترل بهینه در افق نامتناهی و کاربردهای اقتصادی آن در سیاست پولی بهینه، تنظیم فرضیه درآمد دائمی و سرمایه‌گذاری در رویکرد تعدیل هزینه و اصل q -توبین در فصل دهم ارائه شده‌اند. در نهایت توسعه‌های رویکرد کنترل بهینه در فرایند تخصیص دوره زندگی مصرف‌کننده و برخی کاربردهای دیگر به فصل یازدهم واگذار شده‌اند.

پیوست‌های کتاب نیز در مورد جبر خطی، انواع تقعر و شبه تقعر و مازاد مصرف‌کننده‌اند. معیارهای تاکایاما در انتخاب مباحث در حوزه ریاضی و نیز اقتصاد و رویکرد وی در چیدمان فصل‌ها و مطالب، خاص وی است. نظم ذهنی وی در آرایش مطالب را به سختی می‌توان استخراج و ارائه کرد. چاره‌ای نیست جز آنکه گفته شود وی به سلیقه خود، مباحث را کنار هم چیده تا روایت خود از اقتصاد ریاضی را در کتاب اخیرش ارائه دهد.

سیدساتر و استروم به همراه جمعی از همکارانشان دو کتاب ارزشمند در زمینه اقتصاد ریاضی نوشته‌اند:

Sydsaeter, K., A. Strom, and P. Berck, "Economists' Mathematical Manual", Springer, 2000.

Sydsaeter, K., P. Hommand, A. Seierstad, and A. Strom, "Further Mathematics For Economic Analysis", Prentice Hall, 2008.

کتاب «راهنمایی ریاضی اقتصاددانان»، مجموعه جامعی از فرمول‌ها، قضایا و دستورالعمل‌های ریاضی و آمار است که در اقتصاد کاربرد دارند. کتاب در ۳۲ فصل

1- Walras-Keynes-Philips

2- Calculus of Variations

تنظیم شده است. نظریه مجموعه‌ها، رابطه‌ها و توابع در فصل اول، معادلات، توابع تک مقداری و اعداد مختلط در فصل دوم، حد، پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع یک متغیره در فصل سوم، مشتق‌های جزئی در فصل چهارم، کشش و کشش جانشینی در فصل پنجم، دستگاه معادلات، شامل قضیه تابع ضمنی، ژاکوبین، قضیه تابع معکوس، قضیه نگاشت انقباضی و قضایای نقطه ثابت در فصل ششم، نامعادلات در فصل هفتم، سری‌ها و دستور تیلور در فصل هشتم، انتگرال‌گیری در فصل نهم، معادلات تفاضلی در فصل دهم، معادلات دیفرانسیل در فصل یازدهم، توپولوژی فضای اقلیدسی در فصل دوازدهم، تحدب در فصل سیزدهم، بهینه‌سازی مقید و غیرمقید ایستا در فصل چهاردهم، برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی (شامل قضیه کان - تاکر) در فصل پانزدهم، حساب تغییرات و نظریه کنترل بهینه در فصل شانزدهم، بهینه‌سازی پویای گسسته در فصل هفدهم، فضای برداری در فصل هجدهم، ماتریس‌ها و دترمینان‌ها در فصل نوزدهم و بیستم، مقادیر ویژه و فرم‌های درجه دوم در فصل بیست و یکم، ماتریس‌های خاص در فصل بیست و دوم، حاصل ضرب کرونگر و مشتق‌گیری از بردارها و ماتریس‌ها در فصل بیست و سوم، مقایسه ایستا^۱ در فصل بیست و چهارم، خصوصیات توابع هزینه و سود در فصل بیست و پنجم، نظریه مصرف‌کننده در فصل بیست و ششم، مباحثی از مالیه^۲ و رشد در فصل بیست و هفتم، نظریه ریسک‌گریزی در فصل بیست و هشتم، مالیه و حساب تصادفی^۳ در فصل بیست و نهم، نظریه بازی غیر مشارکتی^۴ در فصل سی‌ام، آمار و احتمالات در فصل سی و یکم و سرانجام، توزیع‌های احتمال و روش حداقل مربعات در فصل ۳۲ ارائه شده‌اند.

پوشش این همه مطلب در کمتر از ۲۰۰ صفحه، از یک سو نشان از ایجاز و فشردگی در نحوه بیان مطالب دارد و از سوی دیگر بر خواننده آشکار می‌کند که کتاب سیدساتر و همکارانش، همان‌گونه که از نام آن پیداست، کتابی برای مراجعه

1- Comparative Statics

2- Finance

3- Stochastic

4- Non-Cooperative Game Theory

است و نه مطالعه. گردایه‌ای از فرمول‌ها و دستورالعمل‌ها با پوششی گسترده و شمولی وسیع در این کتاب فراهم آمده است.

شاید بتوان کتاب «ریاضیات فراتر برای تحلیل اقتصادی» سیدساتر و همکارانش را جامع‌ترین کتاب اقتصاد ریاضی قلمداد کرد. این کتاب از نظر پوشش، تقریباً همه مطالب ریاضی مورد نیاز برای دانشجویان کارشناسی ارشد اقتصاد را پوشش می‌دهد. زبان بیان مطالب، محکم، دقیق و متقن است؛ هرچند نویسندگان با ذکر مثال‌های متعدد، استفاده از شکل و نیز بیان کاربردهای اقتصادی، گذار تدریجی از شهود به تدریج را در کتاب پیاده کرده‌اند. از نظر آموزشی نیز، کتاب به ذائقه دانشجوی نزدیک است و ابزارهای مناسب از نظر رنگ، اندازه قلم، حاشیه صفحه و ترسیم اشکال مناسب، بهره‌گیری آموزشی از مطالب آن را تسهیل می‌کند. افزون بر آن، پاسخ همه تمرین‌ها، در پنجاه صفحه انتهای کتاب ارائه شده است.

مطالب کتاب در چهارده فصل به شرح زیر تدوین شده‌اند: جبر خطی مقدماتی، حسابان چند متغیره و بهینه‌یابی ایستا (به ترتیب در فصل‌های اول تا سوم)، انتگرال‌گیری شامل قاعده لایب‌نیتز، انتگرال‌های چندگانه و انتگرال ریمان (فصل چهارم)، معادلات دیفرانسیل یک متغیره، دو متغیره و چند متغیره (به ترتیب در فصل‌های پنجم تا هفتم)، حساب تغییرات، نظریه کنترل یک متغیره و چند متغیره (به ترتیب در فصل‌های هشتم تا دهم)، معادلات تفاضلی (فصل یازدهم)، بهینه‌یابی گسسته (فصل دوازدهم)، توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای و قضایای جداسازی (فصل سیزدهم) و در نهایت، تناظر و قضایای نقطه ثابت (فصل چهاردهم). چنان که دیده می‌شود ریاضیات مورد نیاز برای درک عمیق‌تر اقتصاد خرد و کلان به خوبی در این فصل‌ها پوشش داده شده است.

کتاب «روش‌ها و مدل‌های ریاضی برای اقتصاددانان» نوشته انجل دولافونت به صورتی جامع، گسترده و تفصیلی، ریاضیات مورد نیاز برای محققان رشته اقتصاد و دانشجویان این رشته را در سطح کارشناسی ارشد و دکتری ارائه می‌کند:

De la Fuente, A., "Mathematical Methods and Models for Economists", Cambridge University Press, 2000.

این کتاب در سه قسمت و سیزده فصل تنظیم شده است. در قسمت اول که به مباحث پایه اختصاص دارد، پس از بیان فصلی مشبع در مورد مجموعه‌ها، توابع، روابط، ساختارهای جبری و دستگاه اعداد حقیقی، در فصل دوم به فضاهای متری و نرم‌دار می‌پردازد. فصل سوم، مروری گذرا و فشرده بر فضاهای برداری و تبدیلات خطی است. در فصل چهارم نیز مشتق‌پذیری و مشتق‌گیری ارائه شده است.

بخش دوم کتاب مخصوص تحلیل‌های ایستاست. در فصل پنجم، شیوه معمول اقتصاددانان در تحلیل مقایسه ایستاها بر اساس قضیه تابع ضمنی، باز تولید شده که رویکردی بکر و جدید است. فصل ششم نیز در خصوص مجموعه‌های محدب و توابع مقعر است و فصل هفتم به بهینه‌سازی ایستا اختصاص دارد. با این مقدمات، موضوع فصل هشتم، کاربرد تحلیل‌های ایستای ارائه شده در فصل‌های پیشین در تحلیل مسأله مصرف‌کننده، تعادل والراسی، تعادل نش و رقابت ناکامل است.

قسمت سوم کتاب، سرفصل‌های مطالب فصل‌های ششم تا هشتم در برنامه را به خوبی پوشش می‌دهد. دولافونت در این قسمت نیز ریاضیات و اقتصاد را پا به پای هم ارائه کرده و دو فصل دیگر از سیزده فصل کتاب را به کاربردهای اقتصادی تحلیل‌های پویا اختصاص داده است.

در فصل یازدهم کاربردهای اقتصادی سیستم‌های دینامیکی در گونه دینامیک مدل IS-LM، مدل‌های پیش‌بینی کامل و مدل‌های رشد نئوکلاسیک ارائه شده است. همچنین فصل سیزدهم به کاربردهای ریاضیات پویا در مدل‌های جست‌وجو، رشد بهینه، سرمایه‌گذاری با هزینه نصب و مدل رشد نئوکلاسیک اختصاص داده شده است.

سطح کتاب دولافونت قدری بالاتر از استاندارد در نظر گرفته شده برای درس اقتصاد ریاضی دوره کارشناسی ارشد است. همچنین کتاب از نظر آموزشی چندان روان نیست و دانشجویان به راحتی نمی‌توانند با آن ارتباط برقرار کنند. این دو

نکته باعث می‌شود که به رغم همه ویژگی‌های مثبت کتاب، نتوان آن را به عنوان مرجع اصلی درس معرفی کرد.

یک مزیت کتاب آن است که دینامیک‌های گسسته و پیوسته، هر دو در قسمت سوم پوشش داده می‌شود. مزیت دیگر، پاسخ‌نامه‌ای است که در انتهای کتاب برای تمرین‌های پایان هر بخش در نظر گرفته شده است. بیش از ۱۵۰ صفحه از کتاب ۸۳۵ صفحه‌ای دولافونت به پاسخ‌های تفصیلی آن اختصاص دارد.

۲-۳. دینامیک‌های اقتصادی

در حوزه دینامیک‌های اقتصادی به معرفی ۵ کتاب بسنده می‌کنیم. عنوان نخست، کتاب «مقدمه‌ای بر دینامیک‌های اقتصادی» نوشته رونالد شون است:

Shone, R., "An Introduction to Economic Dynamics", Cambridge University Press, 2001.

کتاب شون نمونه موفقی از یک کتاب درسی در سطح کارشناسی، برای آموزش کاربردهای اقتصادی سیستم‌های دینامیکی بدون توسل به شیوه‌های پیشرفته ریاضی است. ریاضیات مورد نیاز برای فهم دینامیک‌های توضیح داده شده در کتاب، در حد جبر و آنالیز دبیرستانی است. در عین حال دینامیک‌های اقتصادی ارائه شده گسترده و متنوع‌اند: مدل‌های عرضه و تقاضا و فرایند نیل به تعادل در مدل تار عنکبوتی، اثر ضریب تکاثر در مدل IS-LM، دینامیک تورم و بیکاری در منحنی فیلیپس، مدل‌های انحصار چندجانبه، مسیر زینی در مدل‌های انتظارات عقلایی و مدل‌های دینامیک تأمین مالی دولت، دانشجو را با گستره وسیعی از دینامیک‌های اقتصادی آشنا می‌کند. نویسنده چگونگی شبیه‌سازی عددی دینامیک‌های ارائه شده را در محیط نرم افزار Excel، به آسانی به خواننده آموزش می‌دهد.

افزون بر کتاب پیش گفته، رونالد شون کتاب دیگری با همان سبک و سیاق ولی در سطحی پیشرفته‌تر به شرح زیر دارد:

Shone, R., "Economic Dynamics", Cambridge University Press, 1997.

کتاب فوق، برای تدریس سیستم‌های دینامیکی، سبک جدیدی را ابداع کرده است که مبتنی بر شبیه‌سازی‌های عددی و یادگیری به کمک تجربه است. خواننده در این کتاب فرا می‌گیرد چگونه به کمک نرم‌افزارهای صفحه گسترده همچون Excel، مدل‌های دینامیکی را شبیه‌سازی کرده و اثر تغییر پارامترها را در تغییر شکل جواب مشاهده کند. شون در این کتاب به خواننده می‌آموزد چگونه دینامیک‌های گسسته و یا تقریب گسسته دینامیک‌های پیوسته را شبیه‌سازی و واگرایی و همگرایی جواب‌ها را تعقیب کند.

بهره‌گیری از Excel، به عنوان یک ابزار آموزشی سیستم‌های دینامیکی، این امکان را برای دانشجو فراهم می‌کند تا گونه‌شناسی^۱ سیستم‌های دینامیکی را در ساده‌ترین حالت سیستم‌های مسطح بیاموزد، تغییرات کمی را از کیفی باز شناسد و تغییر مقادیر را از تغییر رفتارها جدا کند. این روش مناسب ورود به دنیای جذاب نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل است که اساس کار در سیستم‌های دینامیکی است.

کتاب «دینامیک‌های اقتصادی» شون در دو بخش و چهارده فصل تنظیم شده است. در بخش اول، روش‌ها و مفاهیم و در بخش دوم کاربردها ارائه شده‌اند. سیستم‌های دینامیکی پیوسته و گسسته و مختصری در مورد کنترل آشوب، در بخش اول می‌آید. در بخش دوم، مدل‌های عرضه و تقاضا، صورت دینامیکی مدل IS-LM، دینامیک تورم و بیکاری، مدل‌های دینامیکی اقتصاد بازار در حالت چسبندگی قیمت‌ها و قیمت‌های منعطف، مدل‌های رشد جمعیت، دینامیک‌های مربوط به بهره‌وری از منابع طبیعی تجدیدپذیر^۲ و مدل نسل‌های هم‌پوش^۳ در بخش دوم کتاب ارائه شده‌اند.

از نظر میزان ورود، عمق و پوشش روش‌های تحلیلی و جبری تحلیل سیستم‌های دینامیکی گسسته و پیوسته، کتاب شون، در مقایسه با کتاب‌های گاندولفو (که در ادامه معرفی می‌شود)، هوی و همکارانش و دولافونت تفصیل

1- Typology

2- Renewable

3- Overlapping Generations

بسیار کمتری دارد. روش‌های تحلیلی و جبری در این کتاب مکمل شبیه‌سازی‌های عددی و آنالیز کامپیوتری است که ابتدا در محیط Excel و به تدریج به کمک نرم افزارهای پیشرفته‌تری چون Maple و Mathematica آموزش داده می‌شود. عنوان بعدی، کتاب «مقدمه‌ای بر دینامیک‌های غیرخطی» نوشته مدیو و لاینز است که برای تدریس در سال‌های آخر کارشناسی ارشد و سال اول دکترای اقتصاد تنظیم شده است:

Medio, A. and M. Lines, " Nonlinear Dynamics: A Primer", Cambridge University Press, 2001.

کتاب مدیو و لاینز با اختصاص فصل‌های اول و دوم به مفاهیم مقدماتی و مروری بر دینامیک‌های خطی، از فصل دوم وارد دینامیک‌های غیرخطی می‌شود. پایداری سیستم‌های دینامیکی در فصل سوم بحث می‌شود. مجموعه‌های پایا^۱ و رباینده، مدل‌های تناوبی و شبه تناوبی^۲ در فصل چهارم و انشعاب‌های محلی^۳ در فصل پنجم ارائه می‌شوند. فصل ششم نیز به مجموعه‌های آشوبناک و رباینده‌های آشوبناک اختصاص دارد. نویسندگان در فصل هفتم، نماهای مشخصه^۴، فراکتال‌ها و مدارهای هموکلینیک، در فصل هشتم انتقال به آشوب، در فصل نهم رویکرد ارگودیک و در فصل دهم، سیستم‌های قطعی و فرایندهای تصادفی را معرفی می‌کنند.

کتاب مدیو و لاینز متنی در مورد دینامیک‌های غیرخطی است که توسط غیر ریاضیدانان برای مخاطبان با پیشینه غیرریاضی (و اغلب اقتصادی) نوشته شده است و این مهم‌ترین ویژگی آن است. از این نظر، کتاب آنها برای مخاطب غیرحرفه‌ای از ساختار معمول متون کلاسیک ریاضی (شامل تعریف، قضیه، اثبات، نتیجه) فارغ است و بیشتر اثبات‌ها را به منابع دیگر ارجاع می‌دهد.

در مقابل این ویژگی، کتاب بین تئوری و کاربرد پیوند وثیقی برقرار نمی‌کند و خواننده به جز در موارد انگشت شماری از کاربردهای اقتصادی، از لذت تجهیز به

1- Invariant

2- Quasi Periodic

3- Local Bifurcations

4- Characteristic Exponents

ابزارهای ریاضی پیشرفته در تعمیق فهم و درک خود نسبت به سازوکارهای اقتصادی مدل‌ها حظی نمی‌برد. به جز تحلیل ریاضی سه مثال اقتصادی مربوط به فرایند نیل به تعادل در مدل شبه دینامیک تار عنکبوتی (به عنوان مثال دینامیک‌های خطی) و فرایند همگرایی قیمت‌ها به قیمت‌های تعادلی در مدل تعادل عمومی والراس و نیز مدل رشد نئوکلاسیک (به عنوان دو مثال از دینامیک‌های غیر خطی)، ردپایی از اقتصاد در کتاب دیده نمی‌شود.

با این حال، کتاب «مقدمه‌ای بر دینامیک‌های غیرخطی» متنی خواندنی است و به خصوص، مدیو و لاینز برای دانشجویانی که به نظریه آشوب علاقه‌مندند، دریچه مناسبی برای ورود به دنیای عجیب رفتارهای آشوبناک فراهم می‌کنند. عنوان بعدی در این سرفصل، «کتاب دینامیک‌های اقتصادی» نوشت جیانکارلو گاندولفو است:

Gandolfo, G., "Economic Dynamics", Springer, 1997.

کتاب فوق، جامع، نسبتاً ساده و سرشار از تفصیل است. جامع است زیرا به اعتراف نویسنده، «... این کتاب مجموعه به طور غیرمعمول وسیعی از روش‌های ریاضی را شامل می‌شود». گاندولفو سعی کرده است در پوشش دینامیک‌های اقتصادی چیزی را فروگذار نکند و مبحثی را از قلم نیندازد. جامعیت در کنار سادگی، در این کتاب تأمین شده است. نویسنده در توضیح دینامیک‌های اقتصادی از مفاهیم اولیه شروع کرده و هیچ موضوع پیشرفته ریاضی را پیش نیاز فهم مطالب ارائه شده فرض نکرده است.

این کتاب در سه قسمت، ۲۷ فصل و ۶۷۵ صفحه، دایرةالمعارفی گسترده از دینامیک‌های اقتصادی است. موضوع قسمت اول (شامل ۹ فصل)، معادلات تفاضلی خطی است. نویسنده در این قسمت، خواننده را گام به گام با معادلات تفاضلی آشنا می‌کند. کاربردها در کنار تکنیک‌های ریاضی ارائه می‌شوند. با سیر کتاب از مباحث ساده به پیچیده، مدل‌های اقتصادی نیز به تناسب پیچیده می‌شوند. پایان بحث گاندولفو در این قسمت، دستگاه معادلات همزمان تفاضلی و

کاربرد آن در تحلیل فرایند نیل به تعادل در مدل کورنو از بازار انحصار چندجانبه^۱ و نیز کاربرد ضریب تکاثر^۲ در مدل IS-LM است.

معادلات دیفرانسیل خطی، سرفصل بخش دوم کتاب است. معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول، مسطح و مرتبه بالا، همراه با کاربردهای اقتصادی آنها در قالب نه فصل در این بخش از کتاب ارائه شده‌اند. نویسنده، در پیشبرد همزمان تئوری و کاربرد در این بخش و نیز بخش اول، با گشاده‌دستی کم‌نظیری، کاربردهای اقتصادی سیستم‌های دینامیکی خطی پیوسته را در همگرایی مدل‌های شبه دینامیکی^۳ عرضه و تقاضا، مدل تار عنکبوتی^۴ تا مدل رشد سولو، مدل شتاب ساموئلسون^۵، تحلیل سیاست‌های پایدارسازی^۶، پایداری مدل تعادل عمومی والراس^۷ و مدل سرمایه انسانی MRW^۸، جمع‌آوری کرده است.

گاندولفو مباحث پیشرفته در دینامیک‌های اقتصادی را در بخش سوم کتاب خود، در قالب هشت فصل ارائه کرده است. دو فصل اول از این بخش به توضیح پایداری تعادل و مفهوم تعادل زینی^۹ اختصاص دارد. تعادل زینی در مدل‌های رشد بهینه^{۱۰} از قبیل مدل رشد رمزی و لوکاس و نیز مدل‌های انتظارات عقلایی، با تفصیل در خور توجهی در فصل بیست و دوم کتاب توضیح داده شده‌اند. در فصل بیست و سوم، به توضیح روش پایداری لیاپانوف^{۱۱} و در فصل بیست و چهارم به دینامیک‌های غیرخطی پرداخته شده است. دوره‌های حدی^{۱۲} و معادلات شکار و شکارچی لوتکا - ولترا^{۱۳} نیز در این فصل ارائه شده‌اند.

-
- 1- Oligopoly
 - 2- Multiplier
 - 3- Pseudo Dynamics
 - 4- Cobweb Model
 - 5- Samuelson's Accelerator Model
 - 6- Stabilization Policy
 - 7- Walrasian General Equilibrium Model
 - 8- Mankiw-Romer-Weil
 - 9- Saddle Point
 - 10- Optimal Growth
 - 11- Liapanov
 - 12- Limit Cycles
 - 13- Lotka-Voltra

نظریه انشعاب، دینامیک‌های پیچیده و معادلات مختلط تفاضلی - دیفرانسیل به ترتیب در فصل‌های بیست و پنجم، بیست و ششم و بیست و هفتم تشریح شده‌اند. معدود مدل‌های اقتصادی ارائه شده در این فصل‌ها چندان جذاب نیستند و به جریان اصلی^۱ اقتصاد تعلق ندارند.

قلم گاندولفو در توضیح مباحث، تفصیلی و سرشار از جزئیات بعضاً غیرضروری است. سرعت پیشرفت، بسیار کند و سبک کتاب تا حدی کسل‌کننده و ملالت‌آور است. در همان حال، کتاب از نظر آموزشی به راحتی قابل دنبال کردن و تا حد زیادی خودکفاست. برای دانشجوی علاقه‌مند و با حوصله، بیشتر مطالب کتاب بدون نیاز به معلم قابل فراگیری است. همچنین کتاب مشحون از تمرین‌هایی است که پاسخ آنها در انتهای کتاب آورده شده‌اند.

مزیت دیگر کتاب گاندولفو آن است که هرچند خواننده، دینامیک‌های اقتصادی را با فراگیری ساده‌ترین معادلات تفاضلی خطی مرتبه اول آغاز می‌کند، اما کتاب را با مباحث پیشرفته سیستم‌های دینامیکی همچون دینامیک‌های غیرخطی، پایداری ساختاری، نظریه انشعاب، نظریه آشوب و کاربردهای اقتصادی آنها به پایان می‌برد.

سطح کتاب برای دانشجویان کارشناسی ارشد بسیار مناسب است. نکته سؤال‌برانگیز آن است که به رغم تفصیل و گسترده‌گی مطالب کتاب، نویسنده صفحات بسیار کمی را به توضیح روش‌های بهینه‌سازی پویا اختصاص داده است. از نظر کاربرد نیز مثال‌های بهینه‌سازی پویا، اغلب از مدل‌های رشد اقتصادی انتخاب شده‌اند. همچنین پوشش همزمان سیستم‌های دینامیکی گسسته و پیوسته، در بهینه‌سازی پویا دنبال نشده است و روش‌ها و کاربردهای بهینه‌سازی پویا مختص مدل‌های پیوسته‌اند.

کتاب «سیستم‌های دینامیکی گسسته» نوشته آدد گالور، معرفی تفصیلی و در عین حال جمع و جور سیستم‌های دینامیکی گسسته قطعی خطی و غیرخطی مرتبه اول و چند بعدی، به زبان نسبتاً ساده و با استفاده گسترده از مثال‌ها و

نمودارهای گویاست. ریاضیات مورد نیاز برای درک مطالب کتاب، حسابان و جبر ماتریسی است. به رغم آنکه نویسنده کتاب، اقتصاددانی برجسته و صاحب نظر به خصوص در حوزه رشد اقتصادی است، ولی نشانی از این دانش عمیق در بیان مطالب و به خصوص معرفی کاربردهای گسترده دینامیک‌های گسسته در مدل‌های رشد اقتصادی دیده نمی‌شود. با این حال، کتابی خواندنی و در حیطه خود تقریباً بدون هم‌ورد است. مشخصات کتاب به قرار زیر است:

Galoe, O., "Discrete Dynamical Systems", Springer, 2007

۳-۳. بهینه‌یابی

اقتصاددانان، در مورد بهینه‌یابی و کاربرد آن در اقتصاد، کتاب‌های بسیاری نوشته‌اند. بسیاری از این کتاب‌ها، که شماری از آنها در ادامه معرفی می‌شوند، برای دانشجویان کارشناسی ارشد اقتصاد ریاضی به عنوان کتاب راهنما، کتاب درسی یا مآخذی برای رجوع و مطالعه بیشتر قابل توصیه‌اند:

- Chiang, A., "Elements of Dynamic Optimization", McGraw-Hill, 1992.
 Dixit, A., "Optimization in Economic Theory", 2nd ed., Oxford University Press, 1990.
 Intriligator, M., "Mathematical Optimization and Economic Theory", Prentice-Hall, 1971.
 Kamien, M., and N. Schartz, "Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management", 2nd ed, North-Holland, 1991.
 Leonard, D. and N.V. Long, "Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics", Cambridge University Press, 1992.
 Seierstard, A. and K. Sydsaeter, "Optimal Control Theory with Economic Applications", North-Holland, 1987.

از میان عناوین فوق، کتاب «اصول بهینه‌یابی پویا» ی چیانگ از کتاب‌های مطرح و مرجع در بهینه‌یابی پویاست. قسمت «حساب تغییرات» این کتاب، توسط فریدون اهرابی و عباس شاکری ترجمه و در سال ۱۳۷۷ توسط نشر نی چاپ شده است. ترجمه قسمت «کنترل بهینه» که توسط مترجمان در پیش‌گفتار ترجمه

قسمت اول وعده داده شده است، به بازار عرضه نشده است.

۴. پیوست کتاب‌های اقتصادی

در اینجا یک کتاب اقتصاد خرد و یک کتاب اقتصاد کلان معرفی می‌کنیم که پیوست ریاضی هر یک از آنها تا حد زیادی سرفصل‌های اصلی ریاضیات برای اقتصاد خرد و اقتصاد کلان را پوشش می‌دهند. پیوست ریاضی کتاب «نظریه اقتصاد خرد» نوشته مس کالال و همکارانش، مروری فشرده و در عین حال عمیق بر برخی مباحث ریاضی مورد نیاز در اقتصاد خرد پیشرفته است:

Mas-Colell, A., M.D. Whinston and J.R. Green, "Microeconomic Theory", Oxford University Press, 1995.

به خصوص در مورد توابع مقعر و شبه مقعر، فرم‌های معین، مجموعه‌های محدب و فوق صفحه‌های جداکننده، توابع هموتتیک، قضایای تابع ضمنی، تابع معکوس و نقطه ثابت، توابع پیوسته و مجموعه‌های فشرده، این کتاب مأخذی قابل رجوع برای دانشجویان کارشناسی ارشد اقتصاد است. همچنین در زمینه بهینه‌یابی ایستا، اعم از مقید و غیرمقید و قضیه پوش، متن فوق دقیق، موجز و مستحکم است. از پیوست که بگذریم، متن اصلی کتاب نیز از آنجا که کاربست ساختارها، مفاهیم و چارچوب‌های ریاضی ارائه شده در پیوست در میان مفاهیم اقتصاد خرد است، برای دانشجویان اقتصاد، آموزنده و الهام بخش است.

در حوزه اقتصاد کلان و به خصوص اقتصاد رشد، پیوست ریاضی کتاب «رشد اقتصادی» رابرت بارو و ژاوی سالای مارتین، یک دوره کامل و در عین حال موجز بهینه‌یابی و دینامیک اقتصادی است:

Barro, R. and X. Sala-i-Martin, "Economic Growth", 2nd ed., MIT Press, 2004.

نویسندگان با هنرمندی کم‌نظیری در ۵۵ صفحه، مفاهیم و روش‌های پیشرفته ریاضی مورد نیاز برای فهم دینامیک‌های اقتصادی را در اختیار خوانندگان قرار داده‌اند. هر چند هدف نویسندگان، گردآوری روش‌های اصلی

ریاضی مورد استفاده در کتاب رشد اقتصادی آنان، در یک مجموعه در دسترس است، اما حاصل دوره‌ای کامل از روش‌های ریاضی مورد نیاز برای درک دینامیک‌های اقتصادی، توسط دو تن از پیشگامان این رشته در حوزه نظر و کاربرد است.

معادلات دیفرانسیل، بهینه‌سازی ایستا، بهینه‌سازی پویا در مدل‌های پیوسته، مباحثی در جبر ماتریسی و در نهایت، برخی نتایج مفید در حسابان دیفرانسیل و انتگرال، مطالب پیوست کتاب بارو و سالای مارتین را تشکیل می‌دهند. در توضیح معادلات دیفرانسیل - اعم از معادلات مرتبه اول و دستگاه معادلات دیفرانسیل - روش‌های تحلیلی^۱ و ترسیمی^۲ به صورت مکمل یکدیگر ارائه شده‌اند.

بخش دوم کتاب در عین موجز بودن در ۷ صفحه، کلیدی‌ترین نکات مورد نیاز در بهینه‌سازی ایستا را ارائه کرده است. نحوه ارائه مطالب در این بخش، به گونه‌ای است که انتقالی آرام و طبیعی به مطالب بخش بعدی کتاب در مورد بهینه‌سازی پویا را تسهیل کند. بخش مزبور، متنی جامع و خودکفا در مورد بهینه‌سازی پویا در مدل‌های پیوسته است که مباحث مطرح در این درس در مورد بهینه‌سازی پویا را به خوبی پوشش می‌دهد.

مسأله مقادیر ویژه و الگوریتم قطری‌سازی ماتریس‌های قطری‌شدنی، در نهایت ایجاز و اختصار، به صورت هنرمندانه‌ای در بخش چهارم ارائه شده است. در پایان، گزیده‌ای از قضایا و روش‌های اصلی حسابان شامل قضیه تابع ضمنی، قضیه تیلور، قاعده هوییتال، انتگرال‌گیری جزء به جزء، قضیه اساسی حسابان و مشتق‌گیری از انتگرال‌ها، در بخش پنجم این مجموعه ارائه شده است.

زبان نگارش این مجموعه جذاب و خواندنی است. مثال‌ها مرتبط با هسته اقتصاد کلان و دینامیک‌اند و سبک نگارش، شهودی^۳ و غیراثباتی است. سطح مطالب مناسب دانشجویان کارشناسی ارشد است. با این حال، نویسندگان در تدوین پیوست مورد نظر، بنا بر طبیعت چنین مجموعه‌ای، به اثبات مطالب

1- Analytical

2- Graphical

3- Intuitive

نپرداخته‌اند. همچنین متن، فاقد تمرین است و حوزه پوشش، منحصر به ریاضیات مورد نیاز برای فهم نظریه رشد اقتصادی است. به این دلیل، مجموعه مورد نظر به عنوان متن مکمل و کمک درس متناظر با فصل‌های ششم تا هشتم درسنامه، بسیار مناسب است ولی نمی‌توان به عنوان متن اصلی به آن تکیه کرد.

۵. کتاب‌های اقتصادی با زبان ریاضی

شمار درخور توجهی از کتاب‌های پیشرفته اقتصادی که توسط اقتصاددانان و برای اقتصادخوانان نوشته شده‌اند، در عمل متون ریاضی کاربردی‌اند. خواننده در این کتاب‌ها، اقتصاد را به زبان ریاضی می‌آموزد. غالب این کتاب‌ها در حوزه اقتصاد کلان‌اند. شاید استثنا در این میان، «نظریه ارزش» دبرو باشد که متقدم‌ترین و ماندگارترین اثر در حوزه اقتصاد خرد است:

Debreu, G., "Theory of Value", Wiley, 1959.

نوشته دبرو از یک نظر، ریاضیات محض است، آن هم از ناب‌ترین انواع آن؛ بی‌هیچ‌گونه لفاظی، زیاده‌نویسی و اطناب کلام. از سوی دیگر، «نظریه ارزش»، شاهکار نظریه‌پردازی اقتصادی و هسته اصلی اقتصاد معاصر است. هر آنچه در حوزه اقتصاد خرد و کلان، پس از نظریه تعادل عمومی ارو^۱ و دبرو نظریه‌سازی شده است، شاخه‌هایی از درخت تناوری است که این دو معمار اقتصاد جدید رویانیده‌اند و در این میان، کتاب دبرو از اثرگذارترین سنگ بناهای این مسیر است. کتاب دبرو به علاوه کتاب‌هایی که در حوزه اقتصاد کلان در ادامه معرفی می‌شوند، توسط اقتصاددانانی نوشته شده است که اقتصاد را به زبان ریاضی بیان می‌کنند و آنجا که پای تحلیل نظری در میان است، نظریه‌های اقتصادی را چیزی جز مجموعه‌ای از گزاره‌های منسجم ریاضی نمی‌بینند:

Acemoglu, D., "Introduction to Modern Economic Growth", Princeton University Press, 2009.

Canova, F., "Methods for Applied Macroeconomic Research", Princeton University Press, 2008.

1- Kennet Arrow

Ljungqvist, L. and T. Sargent, "Recursive Macroeconomic Theory", MIT Press, 2004.

Sargent, T., "Dynamic Macroeconomic Theory", Harvard University Press, 1987.

Stokey, N, and R. Lucas with E. Prescott, "Recursive Methods in Economic Dynamics", Harvard University Press, 1989.

Turnovsky, S., "Methods of Macroeconomic Dynamics", MIT Press, 2000.

کتاب «مقدمه‌ای بر رشد اقتصادی جدید»، چنان که نویسنده نیز در پیشگفتار اذعان کرده است، از نظر نگارش با سایر کتاب‌های اقتصادی تفاوت دارد. عاصم اوقلو در این کتاب، خود را مقید کرده است که همه نتایج و یافته‌های ارائه شده در کتاب را یا اثبات کند و یا به تفصیل توضیح دهد. این تعمد، هر چند کتاب را بسیار حجیم (نزدیک به ۱۰۰۰ صفحه) کرده است ولی از سویی دیگر مرز بین ریاضیات تحلیلی و اقتصاد نظری را برداشته است. کتاب عاصم اوقلو از این نظر، مصداق بارز این گفته رابرت لوکاس است که: «آنالیز ریاضی یکی از راه‌های متعدد بیان اقتصاد نظری نیست. این تنها راه است. [اساساً] اقتصاد نظری چیزی جز آنالیز ریاضی نیست. باقی فقط حرف و حدیث است».

به همین دلیل، هسته اصلی مباحث اقتصاد ریاضی پیشرفته پویا مانند برنامه‌ریزی پویا (فصل ششم)، کنترل بهینه (فصل هفتم) و برنامه‌ریزی پویای تصادفی فصل (شانزدهم)، به عنوان فصل‌هایی مستقل در متن کتاب ارائه شده‌اند. افزون بر این، عاصم اوقلو سه فصل را در پیوست‌های انتهایی کتاب خود، به «آنالیز ریاضی و کاربردهای آن در بهینه‌یابی»، «معادلات دیفرانسیل عادی» و «بازی‌های پویا» اختصاص داده است.

در فصل نخست از پیوست ریاضی، توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای، پیوستگی توابع، تناظر، قضایای نقطه ثابت، تابع معکوس و تابع ضمنی، تحدب مجموعه‌ها و تقعر و شبه تقعر توابع، ارائه شده است. در فصل بعد، معادلات دیفرانسیل خطی، تحلیل موضعی معادلات دیفرانسیل خطی، وجود، یکتایی، پیوستگی و مشتق‌پذیری جواب‌های معادلات دیفرانسیل پوشش داده شده‌اند. در نهایت، فصل

آخر به بازی‌های تکراری^۱ با مشاهده‌پذیری کامل اختصاص دارد. در بخش ۸-۲ از این مجموعه، کتاب هامیلتون (۱۹۹۴) معرفی شد. برای آنها که کتاب مزبور را به درستی کتاب مرجع روش‌های سری زمانی در اقتصاد کلان تجربی و اقتصادسنجی می‌دانستند، این نوید را می‌توان داد که کتاب «روش‌های تحقیق در اقتصاد کلان کاربردی» فابیو کانووا مباحث جدیدتر و پیشرفته‌تر اقتصاد کلان تجربی را که در زمان تألیف کتاب هامیلتون چندان متداول نبودند، در یک مجموعه بسیار غنی، عمیق و جامع گرد هم آورده است؛ مباحثی که از سال ۲۰۰۵ به این سو، عمدتاً حول مدل‌های تعادل عمومی تصادفی پویا^۲ (DSGE) مرکزیت یافته‌اند.

کتاب کانووا متنی پیشرفته، منسجم و دقیق درباره چگونگی کاربست روش‌های کاربردی - اعم از آماری، محاسباتی و تحلیلی - در اقتصاد کلان است. هسته اصلی کتاب را توضیح و کاربرد مدل‌های DSGE تشکیل می‌دهد و بقیه مباحث حول این هسته مرکزی سامان داده شده‌اند.

از نظر سرفصل مطالب، روش بیان آنها و رویکرد نویسنده در طرح مباحث، کتاب کانووا کاملاً بدیع است. این کتاب را می‌توان نقطه عطف پژوهش‌هایی معرفی کرد که پس از اشباع ظرفیت مدل‌های کلان‌سنجی^۳، روش‌های منعطف‌تر، کاربردی‌تر و در عین حال سازگارتر با مبانی خرد اقتصاد کلان^۴ را برای برقراری پل بین نظریه و تجربه، به علاقه‌مندان اقتصاد کاربردی معرفی کردند. انتشار کتاب کانووا، اعلام عمومی نیل پژوهش‌های قبلی به نقطه‌ای است که عصاره یافته‌ها را که اجماع نسبی نسبت به آنها وجود دارد، در یک کتاب جامع معرفی می‌کند.

کانووا برای تدریس اقتصاد کلان تجربی، رویکردی متمایز با سه رویکرد متداول در عصر خود را در پیش می‌گیرد: الف) رویکرد آماری مانند هامیلتون (۱۹۹۴؛ ب) رویکرد تحلیلی مانند لینگویست و سارجنت (۲۰۰۴) و ج) رویکرد

1- Repeated Games

2- Dynamic Stochastic General Equilibrium

3- Macroeconometric Models

4- Micro Founded Macroeconomics

عددی و محاسباتی مانند جود^۱ (۱۹۹۸) و میراندا و فاکلر^۲ (۲۰۰۲). با توجه به سطح بسیار پیشرفته کتاب کانوا، معرفی آن به دانشجویان کارشناسی ارشد اقتصاد، تنها به این علت است که آنان که به کاربرد ریاضیات پیشرفته در اقتصاد کلان تجربی علاقه‌مندند، با مراجعه به این کتاب و تورق آن، برای سمت‌دهی مطالعات بعدی خود ایده بگیرند.

کتاب «نظریه اقتصاد کلان بازگشتی» نوشته لینگویست و سارجنت، از متأخرترین کتاب‌های اقتصاد کلان است که روش‌های ریاضی پیشرفته را با گشاده‌دستی بسیار در ارائه و تحلیل مدل‌های اقتصاد کلان به کار گرفته است. این کتاب، یک دوره نسبتاً کامل اقتصاد کلان با تکیه بر برنامه‌ریزی پویا - در حالت قطعی و عدم قطعیت - مبتنی بر روش‌های بازگشتی و سری‌های زمانی است.

از نظر گستره پوشش مباحث جدید اقتصاد کلان و نیز استحکام مطالب و عمق تحلیل‌ها، کتاب لینگویست و سارجنت کم‌نظیر و شاید بی‌نظیر باشد، ولی با وجود این مزایا، بیان پیچیده‌ای در نگارش آن به کار رفته که قابلیت بهره‌برداری از آن را مشکل می‌کند. به علاوه، رویکرد نویسندگان در طرح مطالب، بسیار فنی است، چنان که به قول اندرو آتکیسون، لینگویست و سارجنت با ارائه این کتاب، استاندارد بیان مطالب اقتصاد کلان را برای ده سال بعد وضع کرده‌اند.

کتاب «نظریه اقتصاد کلان پویا» نوشته سارجنت، یادگار دورانی است که انتظارات عقلایی، گفتمان غالب در عرصه اقتصاد کلان بود. ما به ازای این غلبه آن است که فرایندهای تصادفی و برنامه‌ریزی پویای تصادفی و به تبع آنها آنالیز تابعی، ریاضیات غالب برای فهم و بیان مباحث پیشرفته اقتصاد کلان باشد. به فراخور همین نیاز، سارجنت یک فصل کامل (فصل اول) را به توضیح برنامه‌ریزی پویا و مدل‌های کنترل تصادفی اختصاص داده است. همچنین در این کتاب، پیوستی در مورد آنالیز تابعی و کاربردهای آن در اقتصاد کلان وجود دارد. اما بی‌اغراق، تمام کتاب سارجنت، مشحون از کاربردهای آنالیز تابعی به طور عام و برنامه‌ریزی پویای

1- Judd, K., "Numerical Methods in Economics", The MIT Press, 1998.

2- Miranda, M. and P.Fackler, "Applied Computational Economics and Finance", The MIT Press, 1998.

تصادفی به طور خاص، در اقتصاد کلان است.

کتاب «روش‌های بازگشتی در دینامیک‌های اقتصادی» که با همکاری ادوارد پرسکات، توسط نانسی استوکی و رابرت لوکاس نوشته شده، نمونه‌ای اعلای کتابی مملو از نظریات اقتصادی به زبان ریاضیات ناب است. مؤلفان در پیش‌گفتار توضیح می‌دهند که نخست بنا داشته‌اند دو یا سه فصل را به مقدمات ریاضی اختصاص دهند و در باقی کتاب، به تفصیل به توضیح حوزه‌هایی از اقتصاد بپردازند که روش‌های بازگشتی در آنها به کار می‌آید. اما در فرایند تألیف کتاب، دریافته‌اند که پیاده‌سازی این ایده، مستلزم آن است که از خواننده بخواهند یا بیشتر نتایج و یافته‌ها را چشم‌پسته بپذیرد و یا یک دو جین کتاب ریاضی را همواره در کنار دست خود داشته باشد. از آنجا که هیچ یک از این دو گزینه پذیرفتنی نیست، نویسندگان ساختار کتاب را به هم می‌ریزند و کاربرد روش‌های ریاضی در بیان موضوع‌های اقتصادی را چنان در هم می‌آمیزند که حاصل، شاهکار بی بدیلی است که از سال ۱۹۸۹ به این سو، جایگزینی برای آن پیدا نشده است.

نویسندگان معتقدند «روش‌های بازگشتی باید بخشی از جعبه ابزار تحلیل هر اقتصاددان باشد». آنها به درستی بر این باورند که «نه روش‌ها [ای ریاضی] و نه کاربردها [ای اقتصادی]، تاکنون به شکلی نظام‌مند کنار هم ارائه نشده‌اند» و هدف ایشان از تدوین کتاب فوق آن است که دقیقاً این امتزاج را عملی کنند.

این کتاب برحسب توالی منطقی روش‌های ریاضی ارائه شده و کاربردهای اقتصادی ذیل هر روش معرفی شده‌اند؛ زیرا هدف نویسندگان، آن بوده است که در تألیف کتاب، تمرکز خود را به جای محتوای اقتصادی، بر روش‌های تحلیلی بگذارند.

در باب آن بخش از نظریات اقتصادی که درک آنها مستلزم مدل‌سازی عدم قطعیت و نااطمینانی است، نویسندگان بر این باورند که «نظریه اندازه، به سرعت، به زبان استاندارد اقتصاد نااطمینانی تبدیل می‌شود» به گونه‌ای که «سرمایه‌گذاری اندکی در نظریه اندازه، به بازده عظیمی می‌انجامد».

کانون اصلی کتاب استوکی و لوکاس، توضیح روش‌های برنامه‌ریزی پویا در وضعیت‌های قطعی و غیرقطعی و کاربردهای آن در گستره وسیعی از مباحث اقتصادی است.

کتاب «روش‌های اقتصاد کلان پویا»، نمونه کاملاً موفقی از بازنویسی بخش قابل ملاحظه‌ای از هسته اصلی اقتصاد کلان به زبان ریاضی است. ترنوفسکی در این کتاب، با مهارتی کم‌نظیر، ریاضیات پیشرفته را در خدمت بیان ایده‌ها و نظریه‌های اقتصاد کلان می‌گیرد. به علاوه، وی این رویه را در توضیح سه نسل از مدل‌های اقتصاد کلان با مهارت و هنرمندی تمرین می‌کند؛ مدل‌های سنتی اقتصاد کلان، مدل‌های انتظارات عقلایی و مدل‌های بین دوره‌ای^۱.

تکیه کتاب ترنوفسکی در کاربست دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در توضیح مدل‌های اقتصاد کلان و همچنین نشان دادن قوت‌ها و ضعف‌های روش‌های قطعی و تصادفی دینامیک ریاضی در توضیح پدیده‌های جذاب اقتصاد کلان است. بر این اساس، کتاب او در حوزه روش، نحیف و در حوزه کاربرد فربه است.

منابع و مآخذ

فارسی

- ۱- پورکاظمی، محمد حسین. (۱۳۷۹). *ریاضیات عمومی و کاربردهای آن*. تهران: نشر نی.
- ۲- شهشهانی، سیاوش. (۱۳۸۹). *حساب دیفرانسیل و انتگرال*، جلد اول و دوم. تهران: انتشارات فاطمی.

انگلیسی

- 1- Abadir, K. & Magnus, J.R.(2005). *Matrix Algebra*. Cambridge: Cambridge University Press.
- 2- Acemoglu, D.(2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. New Jersey: Princeton University Press.
- 3- Barro, R. & Sala-i-Martin,X.(2004). *Economic Growth*. 2nd ed. Cambridge: MIT Press.
- 4- Bhatt, R. D.(2009). *Intermediate Mathematical Analysis*. Narosa: Alpha Science International Ltd.
- 5- Canova, F.(2008). *Methods for Applied Macroeconomic Research*. New Jersey: Princeton University Press.
- 6- Chiang, A.(1992). *Elements of Dynamic Optimization*. New York: McGraw-Hill.
- 7- De la Fuente, A.(2000). *Mathematical Methods and Models for Economists*. Cambridge: Cambridge University Press.

- 8- Debreu, G.(1959). *Theory of Value*. New York: John wiley & sons Ltd.
- 9- Diebold, F.X.(2004). *Elements of Forecasting*. New York: Thomson Publication.
- 10- Dixit, A.(1990). *Optimization in Economic Theory*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press.
- 11- Fraleigh, J.(1982). *A First Course in Abstract Algebra*. New York: Addison-Wesley.
- 12- Galoe, O.(2007). *Discrete Dynamical Systems*. Berlin: Springer.
- 13- Gandolfo, G.(1997). *Economic Dynamics*. Berlin: Springer.
- 14- Hamilton, J.D.(1994). *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton University Press.
- 15- Hirsch, M. & Smale,S.(1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Boston: Academic Press.
- 16- Hoffimman, K. & Kunze,R.(1971). *Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall.
- 17- Hoy et al.(2001). *Student's Solution Manual for Mathematics for Economics*. Cambridge: MIT Press.
- 18- Hoy, M., Livernois,J Mc Kenna,C Rees,R & Stengos,T.(2001). *Mathematics for Economics*. Cambridge: MIT Press.
- 19- Intriligator, M.(1971). *Mathematical Optimization and Economic Theory*. New Jersey: Prentice-Hall.

- 20- Jordan, D.W. & Smith,P.(1999). *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford: Oxford University Press.
- 21- Kamien, M., & Scharz,N.(1991). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. 2nd ed. Amesterdam: North-Holland.
- 22- Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V.(1970). *Introductory Real Analysis*. (R. Silverman, Trans) New York: Dover Publications.
- 23- Leonard, D. & Long, N.V.(1992). *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*. New Jersey: Cambridge University Press.
- 24- Ljungqvist, L. & Sargent,T.(2004). *Recursive Macroeconomic Theory*. Cambridge: MIT Press.
- 25- Mas-Colell, A., Whinston, M.D. & Green, J.R.(1995). *Microeconomic Theory*. Oxford: Oxford University Press.
- 26- Medio, A. & Lines,M.(2001). *Nonlinear Dynamics: A Primer*. New Jersey: Cambridge University Press.
- 27- Perko, L.(1991). *Differential Equations and Dynamical Systems*. New Jersey: Springer Verlag.
- 28- Rudin, W.(1976). *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill.
- 29- Sargent, T.(1987). *Dynamic Macroeconomic Theory*. Harvard: Harvard University Press.

- 30- Seierstard, A. & Sydsaeter,K.(1987). *Optimal Control Theory with Economic Applications*. Amesterdam: North-Holland.
- 31- Shone, R.(2001). *An Introduction to Economic Dynamics*. New Jersey: Cambridge University Press.
- 32- Shone, R.(1997). *Economic Dynamics*. New Jersey: Cambridge University Press.
- 33- Stewart, I. & Tall,D.(1977). *The Foundations of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- 34- Stokey, N, Lucas,R & Prescott,E.(1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard: Harvard University Press.
- 35- Sundaram, R.(1999). *A First Course in Optimization Theory*. New Jersey: Cambridge University Press.
- 36- Sydsaeter, K., Strom,A & Berck,P.(2000). *Economists' Mathematical Manual*. Berline: Springer.
- 37- Sydsaeter, K., Hommand,P Seierstad,A & Strom,A.(2008). *Further Mathematics For Economic Analysis*. New Jersey: Prentice Hall.
- 38- Takayama, A.(2000). *Analytical Methods in Economics*. Michigan: the University of Michigan Press.
- 39- Thomas, G. B. & Finney, R. L.(1988). *Calculus and Analytical Geometry*. Massachusetts: Addison-Wesley.
- 40- Turnovsky, S.(2000). *Methods of Macroeconomic Dynamics*. Cambridge: MIT Press.